Опр. 2 Пусть f определена на открытом мн-ве $X \subset \mathbb{R}^n$; $\vec{x}^0 \in X$; $\underbrace{\vec{\Delta x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)}_{\text{вектор приращений аргументов.}}$, $\Delta x_k \in \mathbb{R}$: $\vec{x}^0 + \vec{\Delta x} \in X$.

Частной производной ф-ции f в точке $\vec{x}^0$ по перем-й x_k наз-ся выражение
$$f'_{x_k}(\vec{x}^0) := \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_k}. \quad k = 1, \dots, n$$

Другое обозн-е: $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{\vec{x} = \vec{x}^0}$.

Опр. 3 Ф-ция f дифференцируема в точке $\vec{x}^0$, если её полное приращение $\Delta f = f(\vec{x}^0 + \vec{\Delta x}) - f(\vec{x}^0)$ в этой точке представимо в виде:
$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots \alpha_n \Delta x_n \quad (1)$$
где $A_1, \dots, A_n$ – константы; $\alpha_j = \alpha_j(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \xrightarrow[\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0}]{} 0$

Или, эквивалентно,
$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + \bar{o}(\rho), \quad \rho \to 0 \quad (2)$$
где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$.

(1) ⇒ (2) $\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n = \underbrace{\left(\alpha_1 \cdot \frac{\Delta x_1}{\rho} + \dots + \alpha_n \cdot \frac{\Delta x_n}{\rho}\right)}_{= \bar{o}(1),\ \rho \to 0} \cdot \rho = \bar{o}(\rho), \ \rho \to 0$

$\alpha_1 \to 0$, $\left|\frac{\Delta x_1}{\rho}\right| \le 1$; $\alpha_n \to 0$, $\left|\frac{\Delta x_n}{\rho}\right| \le 1$

$\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2} \to 0$

(2) ⇒ (1) $\bar{o}(\rho) = \rho \cdot \bar{o}(1) = \rho \cdot \overbrace{\alpha(\rho)}^{\to 0} = \frac{\rho^2}{\rho} \cdot \alpha(\rho) = \frac{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}{\rho} \cdot \alpha(\rho) = \underbrace{\underbrace{\frac{\Delta x_1}{\rho}}_{\text{огр.}} \cdot \underbrace{\alpha(\rho)}_{\text{б.м.}}}_{= \alpha_1} \Delta x_1 + \dots + \underbrace{\frac{\Delta x_n}{\rho} \cdot \alpha(\rho)}_{= \alpha_n} \Delta x_n = \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n,$

где $\alpha_j \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0 \Leftrightarrow \alpha_j \xrightarrow[\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0}]{} 0$, $j = 1, \dots, n$.

Т. 2 (необходимое усл-е диф-ти). Пусть f диф-ма в точке $\vec{x}^0$. Тогда в этой точке сущ-т все её частные производные (ЧП), причем $f'_{x_k}(\vec{x}^0) = A_k$, $k = 1, \dots, n$.

Д-во: Положим в ф-ле (1): $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_{k-1} = \Delta x_{k+1} = \dots = \Delta x_n = 0$, $\Delta x_k \neq 0$. Тогда
$$\Delta_k f = A_k \Delta x_k + \alpha_k(0, \dots, 0, \Delta x_k, 0, \dots, 0) \cdot \Delta x_k$$
$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k}}_{f'_{x_k}(\vec{x}^0)} = A_k + \underbrace{\lim_{\Delta x_k \to 0} \alpha_k}_{= 0}.$$ ч.т.д.

Замеч-е: Из сущ-ния всех ЧП в точке не следует, вообще говоря, диф-ть в этой точке.

Пример $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$
$$f'_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x \cdot 0} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$
Или: $f(x, 0) \equiv 0 \Rightarrow f'_x(0,0) = 0$.

Аналогично $f'_y(0,0) = 0$.

Проверим на диф-ть: $f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{= 0} \overset{?}{=} \overbrace{f'_x(0,0)}^{= 0}(x - 0) + \overbrace{f'_y(0,0)}^{= 0}(y - 0) + \bar{o}(\rho) \Leftrightarrow \sqrt[3]{xy} \overset{?}{=} \bar{o}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ $\left|\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \overset{x = y}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^{2/3}}{|x|\sqrt{2}} \to \infty \Rightarrow \text{не диф-ма}\right.$

Т. 3 (достаточное усл-е диф-ти)
Пусть все ЧП ф-ции f сущ-т в окр-ти т. $\vec{x}^0$ и непрерывны в т. $\vec{x}^0$. Тогда f диф-ма в точке $\vec{x}^0$.

Д-во: $\Delta f = f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) =$
$= \big(f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_{n-1}^0 + \Delta x_{n-1}, x_n^0)\big) +$
$+ \big(f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_{n-1}^0 + \Delta x_{n-1}, x_n^0) - f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_{n-2}^0 + \Delta x_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n^0)\big) +$
$+ \dots + \big(f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)\big) \overset{\text{т. Лагранжа}}{=}$

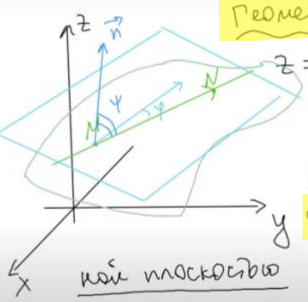
т. Лагранжа, $\theta_1, \dots, \theta_n \in (0,1)$

$= f'_{x_n}(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_{n-1}^0 + \Delta x_{n-1}, x_n^0 + \theta_n \Delta x_n) \cdot \Delta x_n + f'_{x_{n-1}}(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_{n-2}^0 + \Delta x_{n-2}, x_{n-1}^0 + \theta_{n-1} \Delta x_{n-1}, x_n^0) \Delta x_{n-1} + \dots + f'_{x_1}(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) \cdot \Delta x_1 = \big(f'_{x_n}(\vec{x}^0) + \alpha_n(\vec{\Delta x})\big) \cdot \Delta x_n + \big(f'_{x_{n-1}}(\vec{x}^0) + \alpha_{n-1}(\vec{\Delta x})\big) \Delta x_{n-1} + \dots + \big(f'_{x_1}(\vec{x}^0) + \alpha_1(\vec{\Delta x})\big) \Delta x_1,$

где $\alpha_j(\vec{\Delta x}) \xrightarrow[\vec{\Delta x} \to 0]{} 0$, $j = 1, \dots, n \Rightarrow f$ диф-ма в т. $\vec{x}^0$. ч.т.д.

Замеч-е Усл-е непр-ти ЧП не явл-ся необходимым усл-ем диф-ти. **Например,** $f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ диф-ма в $(0,0)$, но ЧП разрывны

Геометрический смысл диф-ти



$z = f(x, y)$. Её график – поверхность.
Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$, $N(x, y, z)$ лежат на пов-ти (т.е. $z_0 = f(x_0, y_0)$, $z = f(x, y)$).

Опр. 4 Пл-ть Π наз-ся касательной плоскостью к пов-ти $z = f(x, y)$ в точке M, если $M \in \Pi$ и угол между Π и $\vec{MN} \to 0$ при $N \to M$.

Утв. 2 Если f диф-ма в т. M, то в этой точке сущ-т касат-я пл-ть Π: $A(x - x_0) + B(y - y_0) - (z - z_0) = 0$, где $A = f'_x(x_0, y_0)$, $B = f'_y(x_0, y_0)$

Д-во: Рассм. не угол φ между $\vec{MN}$ и Π, а угол ψ между $\vec{MN}$ и $\vec{n} = \{A, B, -1\}$ – нормаль Π.

$\varphi \to 0 \Leftrightarrow \psi \to \frac{\pi}{2}$. Действ-но, $|\cos \psi| = \dfrac{|(\vec{MN}, \vec{n})|}{\|\vec{MN}\| \cdot \|\vec{n}\|} =$
$$= \frac{\big|\overbrace{(z - z_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)}^{= \bar{o}(\rho) \text{ в силу диф-ти } f}\big|}{\underbrace{\sqrt{\underbrace{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}_{\rho^2} + \underbrace{(z - z_0)^2}_{\ge 0}}}_{\ge \rho} \cdot \underbrace{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}_{\ge 1}} \le \frac{|\bar{o}(\rho)|}{\rho} \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0.$$ ч.т.д.

$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$